

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (2+2+2+2+3+3 Pkt.): Berechnen Sie für die jeweilige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \{2, 3\}$, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und ggf. $\frac{\partial f}{\partial z}$:

(a) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}},$

(b) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = y^{2x} \quad \text{für } y > 0,$

(c) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \sin(x^2 - y) + \cos(3y) + 1,$

(d) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\det \begin{pmatrix} y & -e^{xy} \\ e^{-xy} + 1 & yx^2 \end{pmatrix} \right)^{-1},$

(e) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = e^{x+z-y^2} \sin(2z),$

(f) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \log\left(\frac{z\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}}\right) \quad \text{für } x, y, z > 0.$

(Hinweis: Verwenden Sie bei (b) exp und log.)

Aufgabe 2 (6+4 Pkt.): Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ sowie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \|x\|_2$.

Für den Nullvektor $(0 \ 0 \ \dots \ 0)^T \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir einfachheitshalber $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Berechnen Sie $Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ für $x \neq \mathbf{0}$.

(b) Zeigen Sie, dass f bei $x = \mathbf{0}$ nicht partiell differenzierbar ist, indem Sie zeigen, dass der Grenzwert von $\frac{f(\mathbf{0} + \Delta x \cdot e_i) - f(\mathbf{0})}{\Delta x}$ für $\Delta x \rightarrow 0$ nicht existiert, wobei $e_i = (0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ mit 1 an i -ter Stelle.

Aufgabe 3 (5+5 Pkt.): Gegeben sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ mit $x \neq \mathbf{0}$ für die jeweilige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \frac{1}{\|x\|_2 + 1},$

(b) $f(x) = x_1 \|x\|_2.$

Aufgabe 4 (Multiple Choice, 1+2+1+2 Pkt.): Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort kurz:

(a) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen und g habe keine Nullstellen.

Ist $(f - g)'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, so ist $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \circ f$ differenzierbar. Dann ist auch f differenzierbar.

(c) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, wobei g keine Nullstellen habe. Sind g und $\frac{f}{g}$ differenzierbar, so ist auch f differenzierbar.

(d) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \cdot f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot f)(x) := f(x) \cdot f(x)$ differenzierbar. Dann ist auch f differenzierbar.

Abgabe: In den entsprechenden Zettelkasten gegenüber vom Raum 25.22.00.58 bis Mi., 17.06.2026, 10:00 Uhr.

Besprechung: In der Übung am Mi., 17.06.2026.